УДК 372

КОМБИНИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НА ЭТАПЕ ОБОБЩЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Мирошниченко И.Л., к.п.н., доцент,
ГГПИ, г. Глазов
irrmir@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются комбинированные уравнения и неравенства, которые эффективно рассматривать, с целью систематизации, углубления и обобщения знаний, обучающихся при подготовке к сдаче единого государственного экзамена.

Ключевые слова: комбинированные уравнения, нестандартные приемы, методы решения.

COMBINED, EQUATIONS, INEQUALITIES AND SYSTEMS AT THE STAGE OF GENERALIZATION OF THE MATERIAL

Miroshnichenko I.L., Ph. D., associate Professor,
GGPI, Glazov
irrmir@mail.ru

Abstract. The article deals with the combined equations and inequalities, which are effectively considered in order to systematize, deepen and generalize the knowledge of students in preparation for the unified state exam.

Keywords: combined equations, non-standard methods, methods of solution.

Подготовка обучающихся к успешной сдачи единого государственного экзамена является одной из основных задач школьного учителя. В 2015 году экзамен по математики разделили на базовый и профильный уровни. Подготовку обучающихся для сдачи экзамена на профильном уровне учителя осуществляют на элективных курсах. На этапе систематизации знаний по решению уравнений и неравенств полезно рассматривать комбинированные уравнения и неравенства. Задачи такого типа играют огромную роль на этапе обобщения и систематизации методов и приемов решения уравнений и неравенств основных типов (показательных, логарифмических, иррациональных тригонометрических). Учитель математики должен владеть различными методами и приемами решения уравнений и неравенств, ориентироваться в выборе эффективного способа решения в конкретной ситуации, уметь комбинировать самые разнообразные математические идеи и факты [3, с.37].

Пример1. Решить уравнение $\log_{\sin x}\cos x + \log_{\cos x}\sin x = 2$

Используя свойства логарифма, имеем систему тригонометрических уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1. \end{cases}$$

Выполнив замену $\log_{\sin x}\cos x = y$, получаем сумму взаимно обратных величин, равную двум: $y + \dfrac{1}{y} = 2.$ Равенство выполняется при $y = 1.$ Решая тригонометрическое уравнение с учетом ограничения, имеем $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi\kappa$, где $\kappa \in Z$. При решении данного уравнения используются знания и умения связанные с решениями тригонометрических уравнений и неравенств, с отбором корней, и применением опорного неравенства. В статье [4, с.39] подобраны примеры, эффективно решаемые с помощью опорных неравенств.

Пример 2. Решить уравнение $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\frac{\sin x}{5}}$.

При решении этого примера используются и свойства тригонометрических функций, и методы решения логарифмического и иррационального уравнений.

Пример 3. Решить систему.

$$\begin{cases} \left|\sin\frac{\pi(x+y)}{4}\right| + \left|1-\sin\frac{\pi(x-y)}{4}\right| = 0, \\ \sqrt{4-|x|-|y+2|} = \sqrt{4-|x|-|y+2|}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы представляет собой сумму модулей, в которой каждое слагаемое внутри модуля содержит тригонометрическое выражение. Если заметить, что слагаемые неотрицательны, то первое уравнение данной системы выполняется только при условии, что $\sin\frac{\pi(x+y)}{4} = 0$ и $\sin\frac{\pi(x-y)}{4} = 1$. Решая уравнения, получаем два семейства параллельных прямых: $x + y = 4\kappa$. т.е. $y = -x + 4\kappa$, где $\kappa \in Z$ (1) и $x - y = 2 + 8m$, т.е. $y = x - 2 - 8m$, где $m \in Z$ (2).

Опять же надо заметить, что правая и левая части иррационального уравнения совпадают, следовательно второе уравнение системы выполняется при условии $4-|x|-|y+2| \ge 0$. Раскрывая модули перебором всех вариантов, получаем, что решением неравенства является множество точек квадрата с вершинами в точках А(-4;-2), В(0;-6), С(4;-2), и Д(0;2). Этот квадрат пересекают две прямые семейства (1) и одна прямая семейства (2). Координаты этих двух точек ($x_1 = -1,\ y_1 = -3$ и $x_2 = 1,\ y_2 = -1$) и являются решением исходной системы. Сопровождая приведенные выкладки графическим изображением, получаем красивое решение задачи.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} \left|\sin\frac{\pi(x+y)}{2}\right| + (x-y-2)^2 \le 0, \\ |2x+3| \le 2. \end{cases}$$

Важно заметить, что в левой части первого неравенства представлена сумма двух неотрицательных слагаемых. Как и в первом примере, его решение сводится к исследованию тригонометрического уравнения и построению графика линейной функции $x - y - 2 = 0$. Необходимо определить множество точек плоскости, удовлетворяющих второму неравенству.

Пример 5. Решить уравнение: $\sqrt{x^2+2x+4} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}} = 4 - \log_3^4\left(x^2 + x^4 + 1\right)$.

Необходимо заметить, что левая часть уравнения не меньше четырех, как сумма взаимно обратных положительных чисел $2\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)$, и только при $x = 0$ она равна четырем. Правая часть представляет собой логарифмическое выражение, которое при $x = 0$ равно четырем, а для всех $x \ne 0$, меньше четырех. Следовательно, $x = 0$ единственное решение данного уравнения. Используется свойство суммы взаимно обратных величин, свойства логарифмической функции.

Пример 6. Решить неравенство $y - \sqrt{1-y-x^2} \ge \frac{1}{|\cos x|}$.

Замечаем, что $\frac{1}{\cos x} \geq 1$, так как $|\cos x| \leq 1$. С другой стороны, левая часть должна быть не больше единицы. Исследуя иррациональное неравенство, имеем систему неравенств: $\begin{cases} y \geq 1, \\ y \leq 1 - x^2. \end{cases}$ Решением исходного неравенства является пара $(0;1)$.

Одним из важных составляющих моментов качества образования является процесс отбора содержания материала[1, с.139]. В работе [2, с.235] подобраны наиболее «проблемные» уравнения и неравенства, при решении которых учащиеся чаще всего испытывают затруднения.

Литература

1. Мирошниченко А.А. Экспертный отбор содержания образования как функция учителя/А.А.Мирошниченко // Развитие идей В.М.Бехтерева в современной медицине, психологии и педагогике: сб. статей по итогам проведения Всероссийской научно-практической конференции, 2018. – С.139-142.

2. Мирошниченко И.Л. Курс по выбору «Различные методы решения уравнений и неравенств» в системе профессиональной подготовки будущего учителя математики неравенств /И.Л.Мирошниченко // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 13. Киров, 2011. – С. 235-242.

3. Мирошниченко И.Л. О курсах по выбору для будущих учителей математики/И.Л.Мирошниченко //Психология и педагогика: методология, теория и практика: сб. статей Междунар. научно-практич. конф. (10 марта 2016 г., г. Челябинск). В 2ч.Ч2. – Уфа: Аэтерна, 2016. – С.37-39.

4. Мирошниченко И.Л. Опорные неравенства при решении математических задач/И.Л.Мирошниченко // Психология и педагогика: методология, теория и практика: сб. статей Междунар. научно-практич. конф. (10 марта 2016 г., г. Челябинск). В 2ч.Ч2. – Уфа: Аэтерна, 2016. – С.39-42.